第27卷 第2期
2010年04月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 2
Apr. 2010

文章编号:1005-3085(2010)02-0347-06

H-矩阵的实用判定*

郭 微, 孙玉祥

(北华大学数学学院，吉林 132013)

摘 要: 利用矩阵对角占优理论，给出了判定严格对角占优矩阵的若干充要条件。利用严格对角占优矩阵与非奇异 H-矩阵之间蕴含的关系，进一步给出了判定非奇异 H-矩阵的一些充要条件，从而拓展了非奇异 H-矩阵的判定准则，并用数值例子说明了这些结论的有效性。

关键词: 非奇异 H-矩阵；对角占优矩阵；非零元素链

分类号: **AMS**(2000) 15A47 **中图分类号**: O151.21 **文献标识码**: A

1 引言

H-矩阵作为一类特殊而重要的矩阵，在许多实际应用领域发挥着重要的作用。然而，判断 H-矩阵却是十分困难的事情。近十年来，H-矩阵的判别引起了许多数学工作者的关注[1-7]，这方面的研究已经成为计算数学和矩阵理论研究的重要课题之一。目前，人们已经得到了许多判别 H-矩阵的充分条件。本文利用对角占优矩阵理论，给出了判定非奇异 H-矩阵的一些充要条件，拓展了非奇异 H-矩阵的判定准则，并用数值例子说明了这些结论的有效性。

用 $C^{n\times n}$ 表示 n 阶的复方阵集合，设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，记

$$P_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad R_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ji}|,$$

其中 $i,j\in N=\{1,2,\cdots,n\}$。引入下列记号

$$M_1=\{\,i\in N\mid P_i(A)<|a_{ii}|<R_i(A)\,\},\quad M_2=\{\,i\in N\mid R_i(A)<|a_{ii}|<P_i(A)\,\},$$

$$M_3=\{\,i\in N\mid |a_{ii}|\geq P_i(A)>R_i(A)\,\},\quad M_4=\{\,i\in N\mid |a_{ii}|\geq R_i(A)>P_i(A)\,\},$$

$$M_5=\{\,i\in N\mid |a_{ii}|>P_i(A)=R_i(A)\,\},\quad M_0=\{\,i\in N\mid |a_{ii}|\leq P_i(A),|a_{ii}|\leq R_i(A)\,\}.$$

定义 1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若 A 的比较矩阵 $M(A)=(m_{ij})_{n\times n}$ 为 M-矩阵，则称 A 为 H-矩阵，其中当 $i=j$ 时，$m_{ij}=|a_{ij}|$；当 $i\neq j$ 时，$m_{ij}=-|a_{ij}|$。

定义 2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若存在 $\alpha\in[0,1]$，使

$$|a_{ii}|\geq \alpha P_i(A)+(1-\alpha)R_i(A),\tag{1}$$

对每一个 $i\in N$ 都成立，则称 A 为 α 对角占优矩阵，记作 $A\in D_0(\alpha)$；若 (1) 式中每个不等号都是严格的，则称 A 为严格 α 对角占优矩阵，记作 $A\in D(\alpha)$。

收稿日期: 2006-07-20. **作者简介**: 郭薇 (1976年6月生)，女，硕士，讲师. 研究方向：基础数学.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10926169).

定义3 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，若$A$为$\alpha$对角占优矩阵，对任意满足(1)式取等号的$i$，有$A$之非零元素链$a_{ii_1},a_{i_1i_2},\cdots,a_{i_rj}$使得

$$j\in J=\left\{i\in N\mid |a_{ii}|>\alpha P_i(A)+(1-\alpha)R_i(A)\right\}\neq\emptyset,$$

则称A为非零元素链α对角占优矩阵。

2 主要结果及证明

引理1[1] 如果$A\in C^{n\times n}$是严格α对角占优矩阵，则A是非奇异H-矩阵。

引理2[2] 如果$A\in C^{n\times n}$为非零元素链α对角占优矩阵，则A是非奇异H-矩阵。

定理1 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，对任意的$i\in N$，$a_{ii}\neq 0$，则$A\in D(\alpha)$的充分必要条件是$M_0=\emptyset$，且对任意的$i\in M_1$，$j\in M_2$，有

$$\frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)}+\frac{|a_{jj}|-R_j(A)}{P_j(A)-R_j(A)}>1. \tag{2}$$

证明 由$A\in D(\alpha)$，则对任意的$i\in M_1$，有$|a_{ii}|>\alpha P_i(A)+(1-\alpha)R_i(A)$，即

$$\alpha>\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)-P_i(A)},$$

知

$$1-\alpha<\frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)},$$

则对任意的$j\in M_2$，有$|a_{jj}|>\alpha P_j(A)+(1-\alpha)R_j(A)$，即

$$\alpha<\frac{|a_{jj}|-R_j(A)}{P_j(A)-R_j(A)}.$$

因此，对任意的$i\in M_1$，$j\in M_2$，有

$$\frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)}+\frac{|a_{jj}|-R_j(A)}{P_j(A)-R_j(A)}>1.$$

反之，对任意的$i\in M_1$，有

$$0<\frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)}<1,$$

则

$$0<1-\frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)}<1.$$

又对任意的$j\in M_2$，有

$$0<\frac{|a_{jj}|-R_j(A)}{P_j(A)-R_j(A)}<1,$$

则由(2)式知存在$0<\alpha<1$，使

$$1-\frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)}<\alpha<\frac{|a_{jj}|-R_j(A)}{P_j(A)-R_j(A)}. \tag{3}$$

容易验证

$$1-\frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)}=\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)-P_i(A)}.$$

由 (3) 式中

$$\alpha>\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)-P_i(A)},$$

知对任意的 $i\in M_1$，有 $|a_{ii}|>\alpha P_i(A)+(1-\alpha)R_i(A)$。同理，由

$$\alpha<\frac{|a_{jj}|-R_j(A)}{P_j(A)-R_j(A)}$$

知对任意的 $j\in M_2$，有 $|a_{jj}|>\alpha P_j(A)+(1-\alpha)R_j(A)$。又因为对任意的 $k\in M_3\cup M_4\cup M_5$，由 $0<\alpha<1$，显然有 $|a_{kk}|>\alpha P_k(A)+(1-\alpha)R_k(A)$。综上，$A$ 为严格 α 对角占优矩阵，即 $A\in D(\alpha)$。

定理2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，对任意的 $i\in N$, $a_{ii}\neq 0$，$M_0=\emptyset$，若对任意的 $i\in M_1$, $j\in M_2$，有 (2) 成立，则 A 是非奇异 H-矩阵。

证明 由定理1知 $A\in D(\alpha)$。再由引理1知 A 是非奇异 H-矩阵。

由定理2我们立即可以得到下面两个推论。

推论1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，对任意的 $i\in N$, $a_{ii}\neq 0$，$M_0=\emptyset$，若对任意的 $i\in M_1$, $j\in M_2$，有

$$\frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)}+\frac{|a_{jj}|-R_j(A)}{P_j(A)-R_j(A)}\geq 1,$$

且对任意的 $i\in\Omega_1$, $j\in\Omega_2$，有 A 之非零元素链 $a_{ii_1},a_{i_1i_2},\cdots,a_{i_rk}$ 和 $a_{jj_1},a_{j_1j_2},\cdots,a_{j_rk}$，使得 $k\in\Omega=N\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)\neq\emptyset$，则 A 是非奇异 H-矩阵。其中

$$\Omega_1=\left\{i\in M_1\ \Big|\ \frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)}+\frac{|a_{jj}|-R_j(A)}{P_j(A)-R_j(A)}=1\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{j\in M_2\ \Big|\ \frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)}+\frac{|a_{jj}|-R_j(A)}{P_j(A)-R_j(A)}=1\right\}.$$

证明 仿定理1的充分性证明过程，可证 A 为非零元素链 α 对角占优矩阵。再由引理2知 A 是非奇异 H-矩阵。

推论2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 为不可约矩阵，对任意的 $i\in N$, $a_{ii}\neq 0$，$M_0=\emptyset$，若

$$\frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)}+\frac{|a_{jj}|-R_j(A)}{P_j(A)-R_j(A)}\geq 1,$$

且上式至少有一个不等式成立，则 A 是非奇异 H-矩阵。

定理3 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，对任意的 $i\in N$, $a_{ii}\neq 0$，则 $A\in D(\alpha)$ 的充分必要条件是 $M_0=\emptyset$，且对任意的 $i\in M_1$, $j\in M_2$，有

$$\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)-P_i(A)}+\frac{P_j(A)-|a_{jj}|}{P_j(A)-R_j(A)}<1. \tag{4}$$

证明 由 $A\in D(\alpha)$，则对任意的 $i\in M_1$，有 $|a_{ii}|>\alpha P_i(A)+(1-\alpha)R_i(A)$，即

$$\alpha>\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)-P_i(A)},$$

则对任意的 $j\in M_2$，有 $|a_{jj}|>\alpha P_j(A)+(1-\alpha)R_j(A)$，即

$$\alpha<\frac{|a_{jj}|-R_j(A)}{P_j(A)-R_j(A)},$$

知

$$1-\alpha>\frac{P_j(A)-|a_{jj}|}{P_j(A)-R_j(A)}.$$

因此，对任意的 $i\in M_1$, $j\in M_2$，有

$$\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)-P_i(A)}+\frac{P_j(A)-|a_{jj}|}{P_j(A)-R_j(A)}<1.$$

反之，对任意的 $i\in M_1$，有

$$0<\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)-P_i(A)}<1,$$

则

$$0<1-\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)-P_i(A)}<1.$$

又对任意的 $j\in M_2$，有

$$0<\frac{P_j(A)-|a_{jj}|}{P_j(A)-R_j(A)}<1,$$

则由 (4) 式知存在 $0<\alpha<1$，使

$$\frac{P_j(A)-|a_{jj}|}{P_j(A)-R_j(A)}<1-\alpha<1-\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)-P_i(A)}. \tag{5}$$

易证

$$1-\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)-P_i(A)}=\frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)}.$$

由 (5) 式中

$$1-\alpha<\frac{|a_{ii}|-P_i(A)}{R_i(A)-P_i(A)},$$

知对任意的 $i\in M_1$，有 $|a_{ii}|>\alpha P_i(A)+(1-\alpha)R_i(A)$。同理，由

$$1-\alpha>\frac{P_j(A)-|a_{jj}|}{P_j(A)-R_j(A)}$$

知对任意的 $j\in M_2$，有 $|a_{jj}|>\alpha P_j(A)+(1-\alpha)R_j(A)$。又因为对任意的 $k\in M_3\cup M_4\cup M_5$，由 $0<\alpha<1$，显然有 $|a_{kk}|>\alpha P_k(A)+(1-\alpha)R_k(A)$。综上，$A$ 为严格 α 对角占优矩阵,即 $A\in D(\alpha)$。

定理4 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，对任意的 $i\in N$, $a_{ii}\neq 0$，$M_0=\emptyset$，若对任意的 $i\in M_1$, $j\in M_2$，有 (4) 成立，则 A 是非奇异 H-矩阵。

证明 由定理3知 $A\in D(\alpha)$。再由引理1知 A 是非奇异 H-矩阵。

由定理4我们立即可以得到下面两个推论。

推论3 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，对任意的 $i\in N$, $a_{ii}\neq 0$，$M_0=\emptyset$，若对任意的 $i\in M_1$, $j\in M_2$，有

$$\frac{R_i(A)-|a_{ii}|}{R_i(A)-P_i(A)}+\frac{P_j(A)-|a_{jj}|}{P_j(A)-R_j(A)}\leq 1,$$

且对任意的$i \in L_1$, $j \in L_2$，有A之非零元素链$a_{ii_1}, a_{i_1 i_2}, \cdots, a_{i_r k}$和$a_{jj_1}, a_{j_1 j_2}, \cdots a_{j_r k}$，使得$k \in L = N \backslash (L_1 \cup L_2) \neq \emptyset$，则$A$是非奇异$H$-矩阵，其中

$$L_1 = \left\{ i \in M_1 \;\middle|\; \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} = 1 \right\},$$

$$L_2 = \left\{ j \in M_2 \;\middle|\; \frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} = 1 \right\}.$$

证明　仿定理3的充分性证明过程，可证A为非零元素链α对角占优矩阵。再由引理2知A是非奇异H-矩阵。

推论4　设$A = (a_{ij}) \in C^{n \times n}$为不可约矩阵，对任意的$i \in N$, $a_{ii} \neq 0$，$M_0 = \emptyset$，若

$$\frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} \leq 1,$$

且上式至少有一个不等式成立，则A是非奇异H-矩阵。

3　数值例子

例　设

$$A = \begin{bmatrix} 80 & 16 & 5 & 15 \\ 16 & 80 & 20 & 10 \\ 24 & 40 & 35 & 10 \\ 40 & 26 & 4 & 40 \end{bmatrix}.$$

因为$M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{3, 4\}$, $M_3 = M_4 = M_5 = M_0 = \emptyset$，则

$$\frac{|a_{11}| - P_1(A)}{R_1(A) - P_1(A)} = \frac{80 - 36}{80 - 36} = 1, \qquad \frac{|a_{22}| - P_2(A)}{R_2(A) - P_2(A)} = \frac{80 - 46}{82 - 46} = \frac{17}{18},$$

$$\frac{|a_{33}| - R_3(A)}{P_3(A) - R_3(A)} = \frac{35 - 29}{74 - 29} = \frac{2}{15}, \qquad \frac{|a_{44}| - R_4(A)}{P_4(A) - R_4(A)} = \frac{40 - 35}{70 - 35} = \frac{1}{7}.$$

因此，对任意的$i \in M_1$, $j \in M_2$，有

$$\frac{|a_{ii}| - P_i(A)}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{|a_{jj}| - R_j(A)}{P_j(A) - R_j(A)} = \frac{17}{18} + \frac{1}{7} > 1,$$

故由本文定理2知A是非奇异H-矩阵。同时由

$$\frac{R_1(A) - |a_{11}|}{R_1(A) - P_1(A)} = \frac{80 - 80}{80 - 36} = 0, \qquad \frac{R_2(A) - |a_{22}|}{R_2(A) - P_2(A)} = \frac{82 - 80}{82 - 46} = \frac{1}{18},$$

$$\frac{P_3(A) - |a_{33}|}{P_3(A) - R_3(A)} = \frac{74 - 35}{74 - 29} = \frac{13}{15}, \qquad \frac{P_4(A) - |a_{44}|}{P_4(A) - R_4(A)} = \frac{70 - 40}{70 - 35} = \frac{6}{7}.$$

因此，对任意的$i \in M_1$, $j \in M_2$，有

$$\frac{R_i(A) - |a_{ii}|}{R_i(A) - P_i(A)} + \frac{P_j(A) - |a_{jj}|}{P_j(A) - R_j(A)} = \frac{1}{18} + \frac{6}{7} < 1,$$

故由本文定理4知A是非奇异H-矩阵。

参考文献：

[1] 孙玉祥. 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报，1997, 19(3): 216-223
Sun Y X. Sufficient conditions for generalized diagonally dominant matrices[J]. Numerical Mathematics: a Journal of Chinese Universities, 1997, 19(3): 216-223

[2] Varga R S. On recurring theorems on diagonal dominance[J]. Linear Algebra Appl, 1976, 13: 1-9

[3] 李继成，黄廷祝，雷光耀. H-矩阵的实用判定[J]. 应用数学学报，2003, 26(3): 413-419
Li J C, Huang T Z, Lei G Y. Practical criteria for H-matrices[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2003, 26(3): 413-419

[4] 黄廷祝. 非奇 H-矩阵的简捷判据[J]. 计算数学，1993, 8(3): 318-328
Huang T Z. Simple criteria for nonsingular H-matrices[J]. Mathematica Numerica Sinica, 1993, 8(3): 318-328

[5] 沈光星. 非奇异 H-阵的新判据[J]. 工程数学学报，1998, 15(4): 21-27
Shen G X. A new type of criteria for nonsingular H-matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1998, 15(4): 21-27

[6] 孙玉祥. 非奇异 H-矩阵的判定[J]. 工程数学学报，2000, 17(4): 45-49
Sun Y X. Criteria for nonsingular H-Matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2000, 17(4): 45-49

[7] 高益明. 矩阵广义对角占优和非奇判定(II)[J]. 工程数学学报，1988, 5(3): 12-17
Gao Y M. Criteria for generalized diagonally dominant matrices and nosingular matices(II)[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 1988, 5(3): 12-17

Practical Criteria for H-Matrix

GUO Wei, SUN Yu-xiang

(Department of Mathematics, Beihua University, Jilin 132013)

Abstract: By using the theory of diagonally dominant matrices, we give some sufficient and necessary conditions for strictly diagonally dominant matrices. Furthermore, we give some sufficient and necessary conditions for nonsingular H-matrices by theirs relations. So the criteria for nonsingular H-matrices are expanded, and the efficiency of the proposed criteria is showed by a numerical example.

Keywords: nonsingular H-matrix; diagonally dominant matrix; chain of nonzero elements

Received: 20 July 2006. **Accepted:** 24 Dec 2008.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10926169).